

SANTILLI RUGGERO

FONDAMENTI

per una

TEORIA UNITARIA SULLA STRUTTURA
DELL'ELETTRONE



Ricerche effettuate nello
ISTITUTO DI FISICA NUCLEARE
NAPOLI

Mostra d'Oltremare - Marzo 1959

B I B L I O G R A F I A.

- L. I. Schiff - Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill.
R. Becker - Theorie der Elektrizitat, G. B. Toubner.
G. Davisson e L. Germer - Phys. Rev. 30, 705, 1927.
G. P. Thomson - Proc. Roy. Soc. London 117, 600, 1928.
L. De Broglie - Ann. Phys. 3, 22, 1925.

I N D I C E

PARTE I

I concetti fondamentali	Pag.	1
Il caso unidimensionale	"	3
Il caso tridimensionale	"	13
Il comportamento ondulatorio	"	21
Lo spin	"	24
Il Principio di Indeterminazione	"	28
Formula generale del livello energetico dell'elettrone ...	"	31

PARTE II

Il campo elettrico dell'elettrone	"	35
Nascita delle forze agenti nel campo elettrico dell'elettrone	"	37
Il meccanismo d'azione del campo elettrico	"	42
Indipendenza fra i lavori effettuati dal campo elettrico ed il livello energetico dell'elettrone	"	50
Il momento magnetico dell'elettrone	"	52
Nascita delle azioni agenti nel momento magnetico	"	53
Meccanismo d'azione del campo magnetico	"	56
L'elemento elettromagnetico dell'azione	"	59
Verifiche sperimentali suggerite	"	62

1
2
3
4
5
6
7
8

P A R T E I



• • •

9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Il presente lavoro è un tentativo di raggiungere alla luce della Meccanica Quantistica una concezione analitica sulla struttura dell'elettrone la quale permetta di interpretare in modo soddisfacente i principali dati sperimentali connessi con la particella: comportamento ondulatorio, nascita e meccanismo d'azione dei campi presenti nel suo intorno, indipendenza fra i lavori effettuati dal campo ed il livello energetico della particella, spin, ecc. ecc.

I concetti fondamentali.

Consideriamo un elettrone in quiete riferito ad una terna centrale di assi cartesiani (x,y,z) . Sia m_0 la sua massa di quiete ed R il suo raggio.

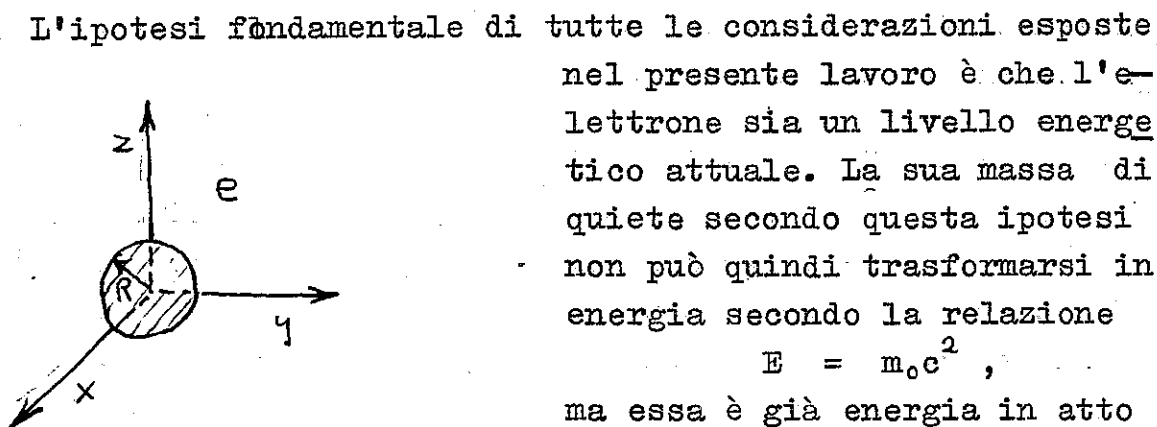


Fig. 1.

L'ipotesi fondamentale di tutte le considerazioni esposte nel presente lavoro è che l'elettrone sia un livello energetico attuale. La sua massa di quiete secondo questa ipotesi non può quindi trasformarsi in energia secondo la relazione

$$E = m_0 c^2,$$

ma essa è già energia in atto completamente realizzata. Questo porta a supporre che nell'interno dell'elettrone esista tutto un particolare sistema

di movimenti tali da localizzare l'autovalore discreto E . L'ipote

si è legittimata dal fatto che, affinché si possa interpretare il comportamento ondulatorio della particella, e quindi anche un suo possibile fenomeno di interferenza (esperienza di Germer e Davisson), l'elettrone deve essere dotato di una struttura profondamente dinamica ed in particolare tale che, se per un istante si riuscisse a fermare tutti i suoi moti componenti, la particella dovrebbe scomparire completamente.

Sia $\psi(\vec{r}, t)$ la funzione d'onda che localizza l'autovalore $m_0 c^2$. I due principali problemi da risolvere sono:

1°) A quale entità attribuire la funzione d'onda ψ ?
ossia quale è quella entità che col suo moto determina la struttura della particella?

2°) Quali sono i moti componenti dell'elettrone?

Mentre il secondo problema riceverà una soddisfacente trattazione matematica, il primo può essere risolto in questa sede solo concettualmente perché riveste carattere di assoluta generalità per tutta la struttura della materia.

Poiché in assenza completa di movimenti, ossia per funzione d'onda nulla, l'elettrone deve scomparire completamente riducendosi ad una pura e semplice porzione di spazio, l'unica entità capace di localizzare la funzione d'onda suddetta è lo spazio stesso. Questa considerazione diviene più plausibile se si pensa che allo spazio è stata già attribuita la possibilità di localizzare una funzione d'onda analoga, come è avvenuto per il pacchetto d'onda, o più in generale per l'onda elettromagnetica che nel fenomeno di interferenza si riduce anch'essa ad una porzione di spazio non modificata.

D'altra parte esiste nella Fisica tutto un complesso di dati sperimentali, quali la trasmissione delle forze dei campi nel vuoto, la trasversalità delle onde elettromagnetiche, la periodicità dei vettori \vec{E} ed \vec{H} delle stesse, la costanza della velocità di propagazione per tutti i tipi di radiazione, l'indipendenza della velocità di propagazione da quella della sorgente, ecc. ecc. che inducono a ritenere che lo spazio si comporti come un mezzo rigido, sia pur fittiziamente, come ha dimostrato la Fisica Moderna; di conseguenza anche la struttura dell'elettrone deve essere tale da condurre alla stessa fittizia rigidità, affinché si rispettino quel

la generalità di concetti fondamentali assolutamente necessaria in una qualsiasi concezione.

Consideriamo una porzione di spazio non percorsa da radiazioni ^{me} elettromagnetiche, né corpuscolari. Sia P un suo punto in quiete. Supponiamo che per cause a noi sconosciute questo punto venga posto in movimento acquistando un autovalore discreto E. Dalla teoria della elasticità sappiamo che, insieme al punto P, entrerà in movimento anche un intorno discreto del punto stesso che durante il moto non viene deformato dalle rimanenti porzioni di mezzo. Sia $\Delta \varphi$ la porzione di mezzo contenuta in tale intorno.

Il nostro problema è quello di determinare la funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$ applicata alla porzione $\Delta \varphi$ e distribuita nell'interno di una sfera di raggio R, capace di determinare la struttura dell'elettrone, localizzandone il corrispondente autovalore, e di contemplare i complessi dati sperimentali ad esso connessi.

I moti componenti possibili sono tre: oscillatori, rotatori e traslatori, ma non tutti sono compatibili con la fittizia rigidità del mezzo e con le dimensioni ben definite della particella. In conseguenza di questo e degli studi eseguiti si consiglia di scindere la funzione d'onda generale $\psi(\vec{r}, t)$ dell'elettrone in due parti:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1 + \psi_2 \quad (1)$$

Chiamiamo ψ_1 la funzione d'onda fondamentale dell'elettrone, perché compatibile con la fittizia rigidità del mezzo. Essa è quindi la funzione d'onda sempre presente per tutti gli autovalori dell'elettrone diversi da zero. La funzione d'onda ψ_2 è invece inessenziale, in quanto determinata da un numero variabile di moti componenti secondari che possono essere presenti o meno.

Precisato questo, non è difficile accorgersi che il moto componente fondamentale della ψ_1 è sempre univocamente determinato: esso non può mai essere altro che una oscillazione armonica perché, come è noto, le porzioni discrete di mezzi gigidi possono entrare in movimento solo secondo delle oscillazioni armoniche.

Il caso unidimensionale.

Trascurando in questa prima approssimazione l'energia loca

lizzata secondo lo spin dell'elettrone, il nostro problema è quello di analizzare un oscillatore lineare di ampiezza massima costante ed eguale a $2 \cdot 10^{-13}$ cm (= R), di autovalore noto uguale a $m_0 c^2$, in un campo di forze centrali dovuto ad un potenziale V indipendente dal tempo

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2, \quad \text{tale che} \quad F = -\nabla V = -kx \quad (2)$$

L'equazione d'onda di Schrödinger assume in questo caso la forma:

$$i \hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\Delta I} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k x^2 \psi_1 \quad (3)$$

dove ΔI è una fittizia inerzia dinamica che si attribuisce ad una porzione di mezzo $\Delta \psi$.

Poiché il campo di forze è centrale, le soluzioni sono del tipo armonico e si possono in conseguenza separare le variabili con la relazione:

$$\psi_1(x, t) = u(x) f(t) \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) e dividendo per ψ_1 si giunge ad una relazione composta di due termini ciascuno funzione di una sola variabile ed uguale all'autovalore E:

$$\begin{cases} i \hbar \frac{d f}{d t} = E f & (5) \\ \frac{1}{u} \left(-\frac{\hbar^2}{2\Delta I} \frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{1}{2} k x^2 u \right) = E & (6) \end{cases}$$

L'equazione per f si integra immediatamente e dà:

$$f(t) = C e^{-\frac{i E t}{\hbar}} \quad (7)$$

Scegliendo la costante C in modo da normalizzare la u, si ha

$$\psi_1(x, t) = u(x) e^{-\frac{i E t}{\hbar}} \quad (8)$$

Il fatto che la soluzione sia complessa non costituisce, come è noto un difetto di formalismo nella Meccanica Quantistica. E' necessario però assicurarsi che tutti i risultati prevedibili per le possibili osservazioni fisiche siano esprimibili per mezzo di numeri reali.

Resta ora incognita solo la funzione u(x) soluzione dell'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2\Delta I} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 u = E u \quad (9)$$

Analizziamo prima qualitativamente la natura delle sue possibili soluzioni. Supponiamo che vi siano delle regioni per le quali il potenziale V è nullo per valori di x sufficientemente grandi positivi e negativi. In queste condizioni la funzione d'onda assume la forma:

$$u(x) = e^{-\beta|x|} = e^{-\sqrt{-\frac{2\Delta I E}{\hbar^2}} |x|} \quad (10)$$

Supponiamo che si possa estendere questa soluzione ai punti intermedi, ad es. per $x = 0$, servendoci delle condizioni al contorno. Ciò è possibile, come è noto, purché si scelgano opportunamente le costanti arbitrarie moltiplicative per valori della x positivi e negativi. Infatti nelle regioni in cui $E < V(x)$, $d^2 u/dx^2$ è positivo e perciò la u è convessa verso l'asse x . Prolungando le soluzioni fino a $\pm \infty$

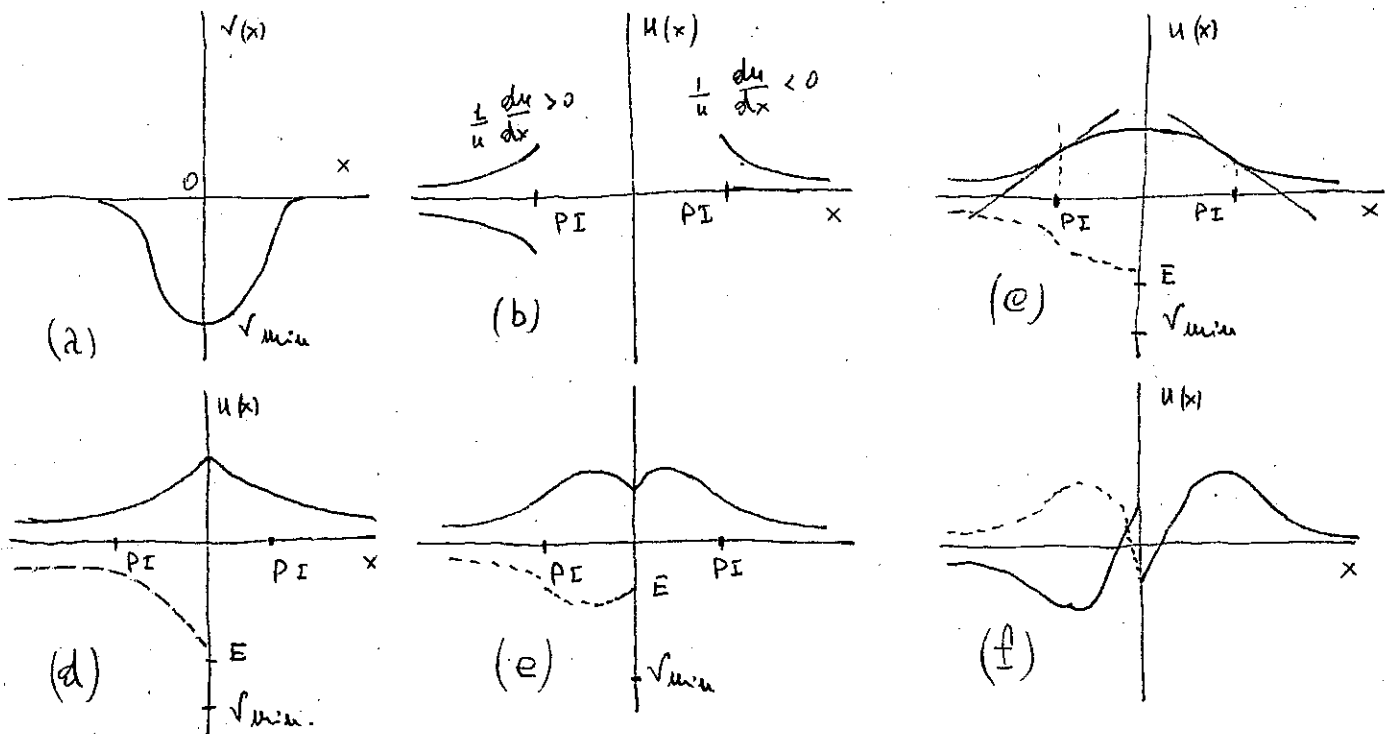


Fig. 2.

si osserva che i rapporti fra la derivata e la funzione hanno sempre segni opposti, finché si mantengono in reciproche regioni per cui E è sempre minore di V . In corrispondenza del particolare valore del potenziale della fig.2(a) si hanno le funzioni d'onda espresse in (b).

I punti PI sono i punti di inversione del moto classico perché sono i punti limite del moto di una particella classica di energia E nel quale si inverte la direzione del moto della particella. In tali punti $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ ed $u(x)$ ha curvatura nulla. Ovviamente per raccordare con continuità le due soluzioni occorrono dei valori di E maggiori di $V(x)$, affinché $\frac{d^2 u}{dx^2}$ sia negativo ed u abbia la concavità volta verso l'asse della x . La fig. 2(d) rappresenta le due soluzioni fino al punto di incontro per un valore un po' minore di E ; si nota che se le u sono uguali, non lo sono le derivate, e viceversa, quando si impone che le derivate siano uguali per $x=0$ le u risultano diverse (curva tratteggiata a sinistra e curva a tratto pieno a destra). Analogamente si hanno le figure 2(e,f,..) per valori sempre maggiori, ossia meno negativi, di E . Si vede così che esiste uno ed un solo particolare valore per il quale l'autofunzione soddisfi le condizioni ai limiti e di continuità con curvature nulle in corrispondenza dei punti di inversione. Analogamente a quanto avviene nel caso classico, la condizione necessaria affinché esista una tale autofunzione è che $V(x) < 0$, nel qual caso E è compreso fra il valore minimo di V e lo zero.

o o o

Introducendo una variabile indipendente adimensionale $\xi = ax$ ed un autovalore adimensionale λ , possiamo scrivere la (9) nella forma adimensionale:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) u = 0 \quad (11)$$

in cui

$$a^2 = \frac{\Delta I K}{f^2}, \quad e \quad \lambda = \frac{2E}{f} \left(\frac{\Delta I}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

La ricerca delle soluzioni della (11) risulta facilitata se si esaminano prima le regioni in cui ξ è sufficientemente grande. Infatti per $\xi \rightarrow \pm \infty$

$$u(\xi) = \xi^n e^{\pm \frac{1}{2} \xi^2} \quad (13)$$

per ogni valore finito di n . Le condizioni al contorno discusse poc'an

zi ci consentono di usare nell'esponente della (13) solo il segno -. Seguendo il punto di vista di Hermite, una possibile soluzione esatta della (11) ha la forma:

$$u(\xi) = H(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (14)$$

che, sostituita nella (11), dà la seguente espressione per $H(\xi)$:

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1) H = 0 \quad (15)$$

Cerchiamo una soluzione di H tale che sia necessariamente finita per $\xi = 0$ ed abbia la forma:

$$H(\xi) = \sum^{\infty} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots) \quad \text{con } a_0 \neq 0 \text{ e } \lambda \geq 0 \quad (16)$$

La Meccanica Quantistica ci insegna che la serie (16) deve essere necessariamente limitata, ed in particolare, detto ν un numero intero, l'autovalore λ deve essere dato dall'espressione:

$$\lambda = 2\nu + 1 \quad (17)$$

Contemplando le due serie relative agli indici pari e dispari, con l'introduzione di un numero quantico n , si ha in definitiva:

$$\lambda = 2n + 1 \quad ; \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h \omega_e \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

dove il valore $E_0 = \frac{1}{2} h \omega_e$ dell'energia dello stato fondamentale o livello zero ci dà il valore della metà della frequenza dell'oscillatore lineare costituente l'elettrone nella sua forma unidimensionale. Si ottiene così, essendo $m_0 = 0,9 \cdot 10^{-27}$ gr, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, ed $h = 6,5 \cdot 10^{-27}$ erg.sec,

$$\nu = \frac{E_0}{h} = \frac{0,9 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{6,5 \cdot 10^{-27}} \frac{92 \text{ cm}^2}{\text{erg} \text{ cm}^3} = 1,25 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1} \quad (19)$$

Si conclude che la parte principale ψ_1 della funzione d'onda generale dell'elettrone rappresenta un oscillatore lineare di autovalore $m_0 c^2$, di ampiezza costante ed uguale a $2 \cdot 10^{-13}$ cm, e di frequenza $1,25 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1}$.

Il valore poc'anzi calcolato per la frequenza dell'oscillatore armonico costituente la parte fondamentale dell'elettrone ci permette di raggiungere una prima verifica sperimentale del punto di vista adottato, servendoci dell'esperienza già eseguita relativa all'annichilamento degli elettroni eteronimi.

Come è noto, se due elettroni eteronimi vengono a contatto in una regione interessata dalla presenza di un nucleo, si osserva la scomparsa delle particelle e la contemporanea emissione di due quanti gamma aventi direzioni opposte. Se analizziamo la trasformazione della funzione d'onda ψ_1 nel quanto gamma ci accorgiamo che la frequenza nei due casi deve rimanere la stessa perché determina il livello energetico in ambedue i casi a meno della costante h . La trasformazione si riduce così alla presenza nel quanto di irraggiamento di un nuovo ente, la lunghezza d'onda, generata dalla traslazione alla velocità c dell'oscillazione armonica costituente l'elettrone.

Ora si è visto che, irraggiando con elettroni positivi dei metalli, si osserva la scomparsa degli elettroni e la contemporanea presenza di quanti gamma di lunghezza d'onda $25 \cdot 10^{-11}$ cm. In corrispondenza di tale lunghezza d'onda si ha la frequenza:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{25 \cdot 10^{-11}} \text{ sec}^{-1} = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1} \quad (20)$$

ossia si ha una frequenza che praticamente coincide, nei limiti dell'approssimazione sperimentale, col valore calcolato per l'elettrone, contribuendo all'attendibilità del punto di vista suggerito sulla struttura della particella in esame.

o o o

Quale seconda riprova, in particolare per le posizioni fondamentali, faremo vedere che esiste una analogia di struttura fra la funzione d'onda ψ_1 dell'elettrone e quella dei pacchetti d'onda, il che contribuisce ad avvalorare l'esistenza della funzione d'onda proposta.

Ricorrendo alle funzioni generatrici

$$\int (\xi, \lambda) = e^{-\lambda^2 + 2\lambda\xi} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{H_{\mu}(\xi)}{\mu!} \lambda^{\mu} \quad (21)$$

e sviluppando opportuni calcoli si trova che l' n -esimo polinomio di Hermite ha l'espressione:

$$H_{\mu}(\xi) = (-1)^{\mu} e^{\xi^2} \frac{\partial^{\mu}}{\partial \xi^{\mu}} e^{-\xi^2} \quad (22)$$

dove in particolare

$$H_0(\xi) = 1 \quad ; \quad H_1(\xi) = 2\xi \quad ; \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \quad (23)$$

In corrispondenza la funzione d'onda $u(x)$ è data da:

$$u_{\mu}(x) = N_{\mu} H_{\mu}(ax) \exp\left[-\frac{1}{2} a^2 x^2\right] \quad (24)$$

dove N_{μ} , tale da normalizzare u :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_{\mu}(x)|^2 dx = \frac{|N_{\mu}|^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\mu}^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 1, \quad (25)$$

ha il valore:

$$N_{\mu} = \left(\frac{a}{\pi^{1/2} 2^{\mu} \mu!} \right)^{1/2} \quad (26)$$

Per l'autofunzione dello stato fondamentale si ha quindi:

$$u_0(x) = \frac{a^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2} \quad (27)$$

ossia si ha una soluzione che è perfettamente equivalente a quella del pacchetto d'onde minimo

$$\psi(x) = \left[2\pi (\Delta x)^2 \right]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{i \langle p \rangle x}{\hbar} \right] \quad (28)$$

Si conclude quindi che il pacchetto minimo può anche essere un'autofunzione dell'equazione d'onda dell'oscillatore lineare costituente la parte fondamentale dell'elettromeccanica, purché naturalmente si stabilisca una opportuna relazione fra le quantità Δx , K e ΔI .

Cerchiamo ora una ψ_1 che sia la più semplice soluzione particolare dell'equazione d'onda, e quindi intuitivamente comprensibile e schematizzabile.

Ricordiamo che una soluzione particolare della equazione di Schrödinger è data da:

$$\psi_1(x, t) = u(x) e^{-\frac{i E t}{\hbar}} \quad (29)$$

dove $u(x)$ è data dall'equazione (14) ed H dalla (22).

Sostituendo in questa il valore ricavato per l'autovalore fondamentale, si ha:

$$\psi_1(x, t) = -u(x) i \operatorname{sen} \frac{E}{\hbar} t = -i u(x) \operatorname{sen} \frac{\hbar^2 v}{\hbar} t = -i u(x) \operatorname{sen} \omega_e t \quad (30)$$

Scegliamo in corrispondenza una soluzione reale. Essa sarà una dei due tipi equivalenti:

$$\boxed{x = R \operatorname{sen} \omega_e t} \quad \text{o} \quad \boxed{x = R \operatorname{cos} \omega_e t} \quad (31)$$

in cui la costante moltiplicativa deve essere uguale al raggio dell'elettrone $R = 2 \cdot 10^{-13}$ cm, in quanto si tratta di equazioni dell'oscillazione armonica.

L'equazione (31)₂ può ritenersi l'equazione più elementare del moto componente fondamentale dell'elettrone, o anche l'equazione di struttura più probabile dell'elettrone nella sua forma unidimensionale.

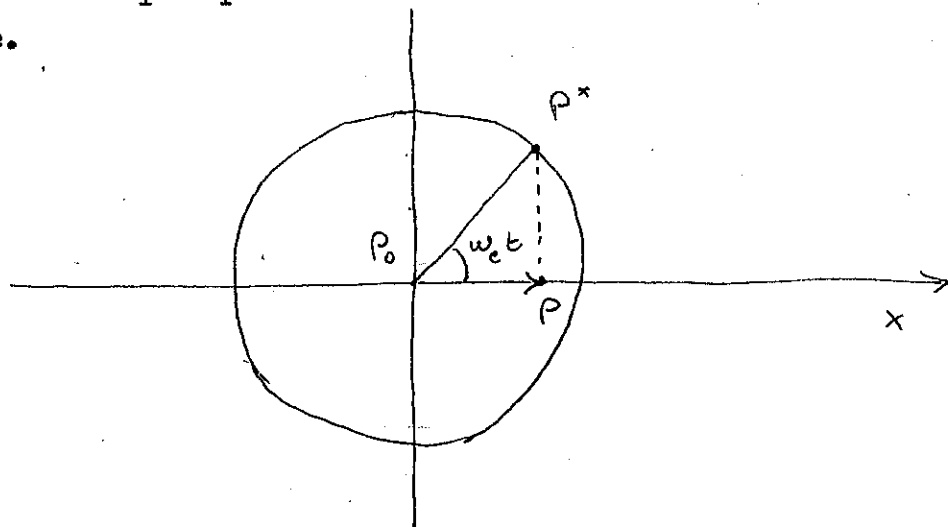


Fig. 3.

Veniamo così ad attribuire un significato fisico alla

II.

quantità ω_e comparsa nell'analisi dell'oscillatore lineare analizzato. Essa rappresenta la velocità angolare del teorico moto rotatorio uniforme che, mediante proiezione sull'asse x , genera l'oscillazione armonica.

o o o

Restano da determinare le quantità K e ΔI .

Ricordiamo la relazione dell'autovalore λ :

$$\lambda = \frac{2E}{f} \left(\frac{\Delta I}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

poiché esso deve essere adimensionale, deve necessariamente verificarsi l'equazione:

$$\lambda = 2 \frac{E}{f \left(\frac{K}{\Delta I} \right)^{\frac{1}{2}}} = 2 \frac{E}{f \nu} \quad (33)$$

la quale, essendo nota la ν , ci conduce alla prima relazione nelle incognite K e ΔI :

$$2\pi \nu \frac{E}{f} = \omega_e = \left(\frac{K}{\Delta I} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Si può giungere alla stessa relazione nel seguente modo. Definiamo Δx e Δp come la radice quadrata dello scarto quadratico medio dal valore probabile:

$$\Delta x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (35)$$

$$\Delta p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \quad (36)$$

dove in particolare per qualunque funzione d'onda di un oscillatore armonico

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0 \quad (37)$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{h}{2\pi} \quad (38)$$

L'energia totale dell'oscillatore può essere espressa in funzione di Δx e Δp mediante la relazione:

$$E_t \sim \frac{(\Delta h)^2}{\Delta I} + K (\Delta x)^2 \quad (39)$$

Se si cerca il valore minimo di questa espressione tenendo conto delle relazioni di indeterminazione, si trova che il valore minimo di Δp è dell'ordine di $(K \Delta I \hbar)^{\frac{1}{4}}$. In conseguenza l'energia to tale minim è dell'ordine di

$$E_{\min} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{K}{\Delta I} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

In conseguenza si riottiene la relazione (35) per il calcolo delle quantità incognite K e ΔI :

$$\frac{K}{\Delta I} = \omega_c^2 = (2\pi\nu)^2 \quad (41)$$

Un'altra relazione necessaria ad eliminare l'indeterminazione a meno di un multiplo intero presente nella (35) ci può essere fornita dalla relazione mediante la quale si definisce il valore probabile di E :

$$\langle E \rangle = \int \bar{\Psi}(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2\Delta I} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) d\tau \quad (42)$$

che applicata nel nostro caso conduce alla relazione:

$$\int \bar{\Psi}_1(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2\Delta I} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} K x^2 \right] \Psi_1(x) dx \sim \mu_0 e^2 \quad (43)$$

Se la Ψ_1 risulta formata da quantità funzioni del solo tempo del tipo $a \sin \omega t$, $b \cos \omega t$, si ha:

$$K = \frac{2 \mu_0 e^2}{\int \bar{\Psi}_1 x^2 \Psi_1 d\tau} \quad (44)$$

Questa relazione sostituita in (35) da infine il valore di ΔI :

$$\Delta I = \frac{2 \mu_0 e^2}{(2\pi\nu)^2 \int \bar{\Psi}_1 x^2 \Psi_1 d\tau} \quad (45)$$

Si può anche calcolare K servendosi della definizione di valore probabile di potenziale e ricorrendo alle funzioni generatrici precedentemente definite:

$$\langle V \rangle_u = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_u(x) \frac{1}{2} K x^2 u_u(x) dx = \frac{1}{2} K \left(\frac{2u+1}{2a^2} \right) = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c = \frac{1}{2} E_u \quad (46)$$

da cui si ha il valore di K in funzione del numero quantico n :

$$K = \frac{2a^2 E_n}{2n + 1} \quad (47)$$

Dalla (46) si vede anche che l'energia potenziale e l'energia cinetica media sono eguali alla metà dell'energia totale per qualunque valore di n , analogamente a quanto avviene per l'oscillatore classico.

Il caso tridimensionale.

Se la funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$ generale dell'elettrone ha una distribuzione spaziale, in corrispondenza del potenziale $V(x)$ del caso unidimensionale, dobbiamo considerare il potenziale $V(\vec{r})$ dato dalla relazione:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} K (x^2 + y^2 + z^2) \quad (48)$$

e l'equazione d'onda di Schrödinger assume la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{1}{2} K (x^2 + y^2 + z^2) \psi \quad (49)$$

Poiché il campo di forze resta centrale, la ψ sarà sempre del tipo armonico, e quindi è possibile separare le variabili x, y, z dalla t , con la relazione $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) f(t)$. In conseguenza si hanno, con un procedimento analogo a quello eseguito per il caso unidimensionale, le due equazioni:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d f}{d t} = E f & (50) \\ \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\nabla^2 u + V(\vec{r}) u \right] = E u & (51) \end{cases}$$

dove l'autovalore E in questo caso è comprensivo anche dell'energia localizzata secondo lo spin dell'elettrone. La prima di queste equazioni si può integrare facilmente avendo il valore di $f(t)$:

$$f(t) = 0 \quad e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (52)$$

e scegliendo anche in questo caso la costante C in modo da normalizzare la u , si giunge alla seguente soluzione particolare dell'equazione d'onda (49):

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (53)$$

o o o

Se è conosciuta la funzione d'onda ψ ad un istante particolare, è possibile seguendo un metodo noto raggiungere una espressione formale della soluzione generale dell'equazione d'onda in ψ ad un istante qualunque.

Sviluppiamo la $\psi(\vec{r}, t)$ in serie di autofunzioni dell'energia ad un istante qualunque t ; in questo caso i coefficienti dello sviluppo dipenderanno dal tempo:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_E A_E(t) u_E(\vec{r}) \quad ; \quad A_E(t) = \int \bar{u}_E(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) d\tau \quad (54)$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione d'onda (49) si ha:

$$i\hbar \sum_E u_E(\vec{r}) \frac{d}{dt} A_E(t) = \sum_E A_E(t) E u_E(\vec{r}) \quad (55)$$

la quale equazione, in virtù dell'ortonormalità di u_E , è equivalente all'altra:

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_E(t) = E A_E(t) \quad (56)$$

che integrata da:

$$A_E(t) = A_E(t_0) e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}} \quad (57)$$

dove il termine $|A_E(t)|^2 = |A_E(t_0)|^2$ è costante rispetto al tempo in quanto è uguale alla funzione di probabilità dell'energia $P(E)$. Pertanto se è nota la $\psi(\vec{r}, t)$ all'istante $t = t_0$, la soluzione ad un istante qualunque t si ottiene dalle equazioni (54) e (57):

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_E A_E(t_0) e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}} u_E(\vec{r}) \quad (58)$$

$$A_E(t_0) = \int \bar{u}_E(\vec{r}') \psi(\vec{r}', t_0) d\tau' \quad (59)$$

cioè

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \left[\sum_E \bar{u}_E(\vec{r}') u_E(\vec{r}) e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}} \right] \psi(\vec{r}', t_0) d\tau' \quad (60)$$

Questa espressione rappresenta la cercata funzione d'onda generale dell'elettrone soluzione dell'equazione (49). Essa risulta essere una combinazione lineare delle soluzioni a variabili separate (53) precedentemente ottenute, e quindi in definitiva si può considerare generata da una combinazione lineare di equazioni del tipo (31) e delle analoghe per l'asse y e per l'asse z.

o o o

Per poter analizzare la funzione d'onda ancora incognita ψ_2 e giungere ad un suo probabile significato fisico consideriamo alcune particolarizzazioni della soluzione (60) relativa alla funzione d'onda generale.

Abbiamo già visto che nel caso unidimensionale la funzione d'onda ψ_2 è assente. Di conseguenza siamo indotti a ritenere che essa compare solo quando la funzione d'onda fondamentale ψ_1 per effetto di urti o di moti componenti secondari abbandona la sua direzione di oscillazione per assumere una localizzazione a più di una dimensione. Analizziamo i due casi che successivamente si possono presentare: quando la $\psi(\vec{r}, t)$ generale si localizza in tutto l'interno della circonferenza di raggio R (caso bidimensionale), e quando si localizza in tutto l'interno della sfera di raggio R (caso tridimensionale).

Supponiamo in primo luogo che le componenti della funzione

$\psi(\vec{r}, t)$ lungo l'asse z . In base alla soluzione generale (60) una possibile soluzione particolare dell'equazione di struttura dell'elettro e può essere formata da una combinazione lineare di equazioni del tipo (31). Prendiamo in considerazione la seguente soluzione particolare:

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega_1 t + \theta_1) + b \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ y = c \cos(\omega_3 t + \theta_3) \end{cases} \quad (61)$$

essa può essere messa nella forma

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega_c t + \theta_1) + R \cos(\bar{\omega} t + \theta_2) \\ y = R \sin(\bar{\omega} t + \theta_2) \end{cases} \quad (62)$$

derivando si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \omega_c \sin(\omega_c t + \theta_1) - R \bar{\omega} \sin(\bar{\omega} t + \theta_2) \\ \dot{y} = R \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t + \theta_2) \end{cases} \quad (63)$$

Se analizziamo l'equazione raggiunta, poiché essa è nelle componenti del vettore \vec{v} , possiamo pensarla come ottenuta dalla somma delle seguenti due

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \omega_c \sin(\omega_c t + \theta_1) \\ \dot{y} = 0 \end{cases} ; \quad \dot{M}_z \begin{cases} \dot{x} = -R \bar{\omega} \sin(\bar{\omega} t + \theta_2) \\ \dot{y} = R \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t + \theta_2) \end{cases} \quad (64)$$

Ora possiamo facilmente riconoscere nella prima la funzione d'onda più probabile dell'elettro nella sua forma unidimensionale (31), nella seconda l'equazione di un moto rotatorio uniforme attorno all'asse z di velocità angolare $\bar{\omega}$ e di fase iniziale θ_2 .

Generalizzando, possiamo giungere ad una prima interpretazione

ne fisica della funzione d'onda $\psi_2(\vec{r}, t)$; infatti siamo indotti a ritenere, ricordando che essa non compare nel caso unidimensionale, che essa generi la distribuzione spaziale della funzione d'onda fondamentale $\psi_1(\vec{r}, t)$ mediante tutta una serie di moti rotatori componenti istantanei o uniformi che nel caso piano si riducono ad uno solo (inteso come risultante o meno di più moti rotatori componenti tutti attorno allo stesso asse). In definitiva, mentre la funzione d'onda fondamentale vede la sua natura nell'oscillazione armonica, la funzione d'onda $\psi_2(\vec{r}, t)$ vede la sua natura in moti rotatori componenti secondari.

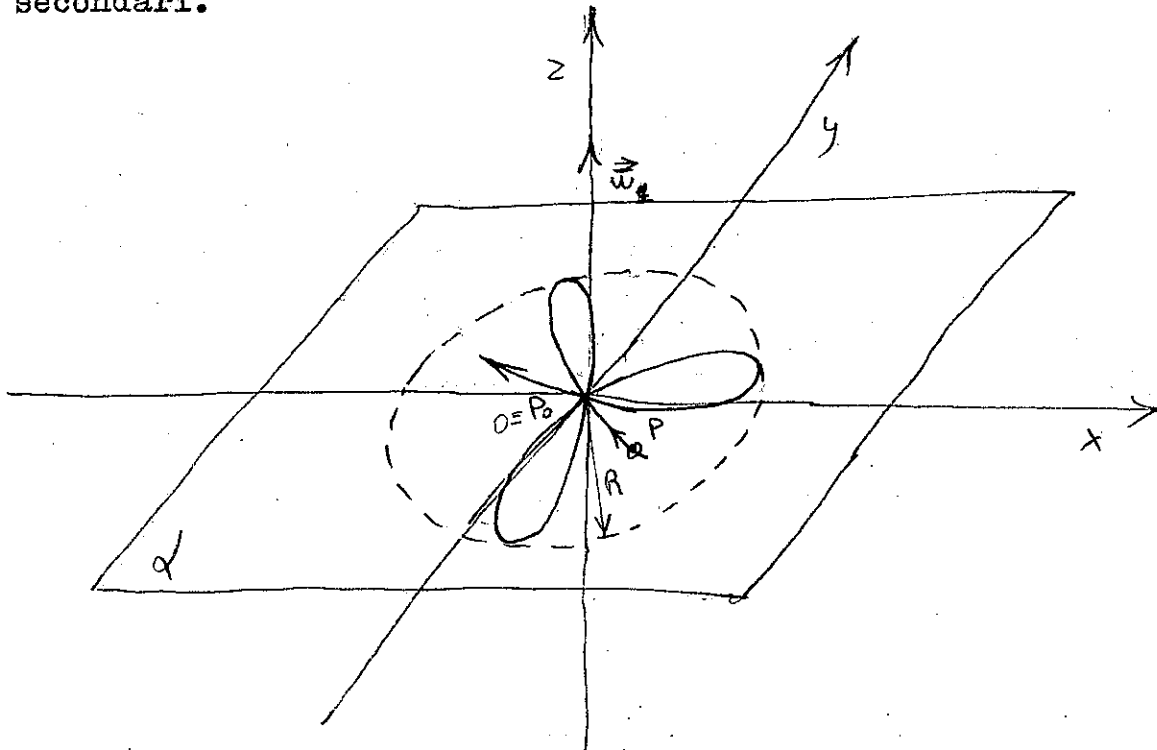


Fig. 4.

Se rappresentiamo graficamente l'equazione (63) otteniamo un particolare tipo di moto a rosetta centrato secondo quanto illustra la fig. 4. L'oscillazione armonica, originariamente diretta solo secondo l'asse x, per effetto di un urto viene a comporsi con un moto rotatorio secondo un asse perpendicolare alla sua direzione di oscillazione per $x = 0$. In conseguenza del moto componente secondario l'oscillazione fondamentale viene così a distribuirsi nel corso del tempo in tutto l'interno della circonferenza di raggio R, generando un ente che ha una localizzazione piana.

L'equazione (63) può in definitiva ritenersi come l'equazione di struttura più probabile dell'elettrone nella sua forma piana, e la fig. 4 ne dà in corrispondenza lo schema. Essa è una particolare localizzazione dell'equazione d'onda generale dell'elettrone relativamente al caso piano e risulta formata dalla funzione d'onda fondamentale ψ_1 che si localizza secondo un'oscillazione armonica, e dalla funzione d'onda secondaria $\psi_2(\vec{r}, t)$, che si localizza mediante un moto rotatorio componente attorno ad un asse perpendicolare a quello di oscillazione.

o o o

A riprova della interpretazione data alla funzione d'onda $\psi_2(\vec{r}, t)$ consideriamo il caso in cui la $\psi(\vec{r}, t)$ generale abbia una distribuzione spaziale, ossia presenti delle componenti secondo tutti e tre gli assi di riferimento.

In base all'equazione (60) possiamo affermare che una soluzione particolare dell'equazione di struttura dell'elettrone può essere la seguente:

$$\begin{cases} x = a \cos(d_1 t + \theta_1) + b \cos(d_2 t + \theta_2) \\ y = c \cos(d_3 t + \theta_3) + d \cos(d_4 t + \theta_4) \\ z = e \cos(d_5 t + \theta_5) \end{cases} \quad (65)$$

che può essere messa nella forma:

$$\begin{cases} x = R \cos(\bar{\omega}_1 t + \theta_1) + R \cos(\bar{\omega}_2 t + \theta_2) \\ y = R \sin(\bar{\omega}_1 t + \theta_2) + R \cos(\bar{\omega}_2 t + \theta_3) \\ z = R \sin(\bar{\omega}_2 t + \theta_3) \end{cases} \quad (66)$$

Derivando si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\omega_e \operatorname{sen}(\omega_e t + \theta_1) - R\bar{\omega}_1 \operatorname{sen}(\bar{\omega}_1 t + \theta_2) \\ \dot{y} = R\bar{\omega}_1 \operatorname{cos}(\bar{\omega}_1 t + \theta_2) - R\bar{\omega}_2 \operatorname{sen}(\bar{\omega}_2 t + \theta_3) \\ \dot{z} = R\bar{\omega}_2 \operatorname{cos}(\bar{\omega}_2 t + \theta_3) \end{cases} \quad (67)$$

Questa equazione, essendo nelle componenti della velocità v , può facilmente pensarsi come ottenuta dalla somma delle seguenti tre:

$$\dot{M}_a \begin{cases} \dot{x} = -R\omega_e \operatorname{sen}(\omega_e t + \theta_1) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}, \quad \dot{M}_{z_1} \begin{cases} \dot{x} = -R\bar{\omega}_1 \operatorname{sen}(\bar{\omega}_1 t + \theta_2) \\ \dot{y} = R\bar{\omega}_1 \operatorname{cos}(\bar{\omega}_1 t + \theta_2) \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad (68)$$

$$\dot{M}_{z_2} \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -R\bar{\omega}_2 \operatorname{sen}(\bar{\omega}_2 t + \theta_3) \\ \dot{z} = R\bar{\omega}_2 \operatorname{cos}(\bar{\omega}_2 t + \theta_3) \end{cases}$$

Di queste la prima è l'equazione fondamentale (31) dell'oscillazione armonica caratteristica dell'elettrone, mentre le rimanenti due sono le equazioni di due moti rotatori componenti l'uno attorno all'asse z e l'altro attorno all'asse x di velocità angolari e fasi iniziali rispettivamente $\bar{\omega}_1, \theta_2$ e $\bar{\omega}_2, \theta_3$. In definitiva l'equazione (67) può pensarsi ottenuta dall'equazione (63) più un moto rotatorio componente attorno ad un asse passante per P_0 contenuto nel piano (xy) che trasforma la localizzazione piana dell'equazione (67) in una distribuzione spaziale.

L'ente rappresentato dall'equazione (67) rappresenta in prima approssimazione gli aspetti classici dell'elettrone che sono quelli di una entità corpuscolare contenuta in una ben definita sfera di raggio $R = 2 \cdot 10^{-13}$ cm. Infatti le velocità angolari ω_e , $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ che compaiono nella (67) sono, come vedremo in seguito, elevatissime, per cui lo spazio contenuto nella sfera di raggio R descritta dalla funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$ è in pratica impenetrabile per un fenomeno analogo a quello delle vibrazioni delle lamine ad altissima frequenza: l'oscillazione armonica fondamentale, in conseguenza degli elevati valori delle velocità angolari dei moti rotatori componenti, in pratica viene ad essere contemporaneamente presente in ogni direzione di una stella di rette passanti per P_0 , venendo a determinare nel corso del tempo un ente compatto e ben definito.

o o o

Pur mantenendo ad una prima approssimazione gli aspetti classici della particella, si è così giunti ad una concezione dinamica sulla struttura dell'elettrone secondo la quale la sua energia di quiete $m_0 c^2$ costituisce l'autovalore fondamentale di un'autofunzione $\psi(\vec{r}, t)$ composta nei suoi casi più particolari di un moto armonico fondamentale di ampiezza costante R e di frequenza $1,25 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1}$ e di molteplici moti componenti secondari, il tutto corrispondente rispettivamente ad una funzione d'onda essenziale ψ_1 e ad una funzione d'onda secondaria ψ_2 .

Vediamo ora se questa concezione, affinché sia attendibile, permette di interpretare in modo soddisfacente i principali dati sperimentali conosciuti sulla particella in esame: comportamento oscillatorio, spin, indeterminazione, nascita e meccanismo d'azione delle forze presenti nel suo intorno, annichilamento, ecc. ecc.

Il comportamento ondulatorio.

E' noto che l'elettrone, se dotato di velocità di traslazione v , presenta un comportamento ondulatorio perfettamente analogo a quello delle onde elettromagnetiche, manifestando di avere tutte le caratteristiche proprie dell'onda, come ampiezza, lunghezza d'onda e frequenza (esperienza di Germer e Davisson).

Questo comportamento, allorché fu scoperto, destò un notevole stupore nell'ambiente scientifico del tempo ancora fedele alle Teorie corpuscolari sulla struttura della materia, perché assolutamente imprevedibile. Infatti era inconcepibile che una entità di aspetto corpuscolare e di ben definite dimensioni potesse presentare un comportamento ondulatorio, che è tipico delle onde elastiche.

La Fisica Moderna, pur avendo raggiunto le leggi che governano questo fenomeno, potendo oggi prevederlo con un'ottima approssimazione, non è riuscita comunque a dare una spiegazione al perché questo fenomeno si manifesta, mantenendo d'altra parte il più assoluto silenzio sulla struttura dell'elettrone stesso.

Per il punto di vista adottato nel presente lavoro sulla struttura dell'elettrone il comportamento ondulatorio della particella riceve una immediata interpretazione concettuale che ne costituisce una delle sue migliori conferme. Infatti l'elettrone non è più una non meglio identificata "entità" localizzata nell'interno di una sfera di raggio R , ma una funzione d'onda che nella sua quasi totalità è costituita da un'oscillazione armonica. Se componiamo questa oscillazione con un moto traslatorio in direzione perpendicolare a quella di oscillazione o comunque diversa, ecco che l'ente acquista tutte le caratteristiche dell'onda, ossia frequenza (che già possedeva), lunghezza d'onda ed ampiezza, potendo di conseguenza presentare senz'altro tutti i fenomeni tipici delle onde, quali diffrazione, interferenza, rifrazione, ecc. ecc.

Vediamo ora come la funzione d'onda $\psi(x, t)$ trovata può rappresentare la formula fondamentale della Meccanica Ondulatoria, essendo di conseguenza in pieno accordo con essa.

Un raggio luminoso, propagandosi in un mezzo con indice di rifrazione variabile nella direzione di propagazione, descrive una traiet toria curvilinea. Indicando con V la velocità di fase dell'onda, può ritenersi che l'espressione

$$\int_A^B \frac{1}{V} ds \quad (69)$$

costruita lungo la traiettoria effettiva è un estremo. Ciò significa che la somma delle quantità $1/V ds$ per le traiettorie variate ha un valore vicinissimo a quello relativo alla traiettoria effettiva:

$$\int \int_A^B \frac{1}{V} ds = 0 \quad (70)$$

D'altra parte, connesso col moto del quanto luminoso vi è un impulso dato dalla nota espressione:

$$I = \frac{h \nu}{e} \quad (71)$$

dalla quale si ricava:

$$\lambda = \frac{e}{\nu} = \frac{h}{I} \quad (72)$$

Il De Broglie, dalla analogia esistente fra l'espressione (69) e quella del Principio di Maupertius per il moto delle masse materiali, ebbe modo di postulare che i corpuscoli materiali presentassero in conseguenza anch'essi una espressione analoga alla (72). Egli in breve postulò che ad ogni moto di un corpuscolo materiale sia associata un'onda di lunghezza d'onda data dalla relazione (dove v' indica la velocità del corpuscolo):

$$\lambda = \frac{h}{I} = \frac{h}{\mu_0 v'} \quad (73)$$

Vediamo ora come può ricavarsi questa espressione alla luce della esposta concezione sulla struttura dell'elettrone.

Dalla espressione (18) relativa all'autovalore dello stato fondamentale può ricavarsi il periodo di oscillazione dell'oscillatore lineare costituente la funzione d'onda fondamentale ψ_1 . Infatti:

$$m_0 e^2 = h \nu = \frac{h}{T}, \quad \text{da cui} \quad T = \frac{h}{m_0 e^2} \quad (74)$$

Sia V la velocità di fase dell'onda associata all'elettrone in moto. Per definizione la lunghezza d'onda è data dal prodotto della velocità di propagazione per il periodo T di oscillazione:

$$\lambda = VT \quad (75)$$

Sostituendo in questa espressione il valore (74) per il periodo T si ha:

$$\lambda = \frac{Vh}{m_0 e^2} \quad (76)$$

ricordando poi la relazione esistente fra la velocità di fase V e la velocità di propagazione v' del corpuscolo

$$Vv' = c^2, \quad (77)$$

si ricava:

$$V = \frac{c^2}{v'} \quad (78)$$

che, sostituita nella (76), conduce all'espressione:

$$\lambda = \frac{Vh}{m_0 e^2} = \frac{h}{m_0 v'} = \frac{h}{I} \quad (79)$$

ossia si ha in definitiva per la lunghezza d'onda dell'onda associata alla funzione ψ_i in moto una espressione coincidente con la formula fondamentale della Meccanica Ondulatoria.

Questa formula ha avuto, come è noto, piena conferma sperimentale che naturalmente ora contribuisce ad avvalorare l'esposta concezione sulla struttura dell'elettrone. Essa fu verificata prima con un dispositivo realizzato da Germer e Davisson analogo a quello usato da Bragg per i raggi X, ed in un secondo tempo fu verificata anche da G. Thomson con un dispositivo analogo a quello usato da Debye e Scherrer sempre per i raggi X. A titolo informativo si ricorda che la formula (79) per velocità dell'elettrone dell'ordine di 10^9 cm/sec dà una lunghezza d'onda dell'ordine di 10^{-8} cm, ossia dell'ordine di grandezza di quella dei raggi X.

Lo spin.

In questa prima trattazione elementare ci limitiamo a dare solo risultati qualitativi nei riguardi dello spin dell'elettrone, rimandando ad un altro lavoro tutti i calcoli e gli sviluppi matematici peraltro inutili per una prima visione d'insieme del problema affrontato.

Concettualmente l'interpretazione dello spin dell'elettrone è già stata raggiunta. Infatti abbiamo visto che la funzione d'onda generale dell'elettrone $\psi(\vec{r}, t)$ può considerarsi nelle sue forme più probabili composta da una funzione d'onda fondamentale ψ_1 , localizzata secondo un'oscillazione armonica, e da una funzione d'onda secondaria ψ_2 che vede la sua natura in moti rotatori componenti mediante i quali determina la distribuzione spaziale della ψ_1 .

I moti rotatori componenti sono giustificabili d'altra parte anche da un punto di vista dinamico. Infatti l'elettrone, come è noto, risponde al 1° Principio della Dinamica, ossia una volta composto con un determinato moto, lo conserva indefinitamente, finché non intervengono cause esterne atte a turbare lo stato dinamico. Di conseguenza l'oscillatore lineare costituente la parte fondamentale dell'elettrone, una volta subito un urto, si compone con un moto rotatorio attorno ad un asse perpendicolare alla sua direzione di oscillazione secondo l'equazione (63), conservandolo indefinitamente. Se a sua volta la funzione d'onda piana (63) subisce un urto, si compone con un secondo moto rotatorio attorno ad un asse del piano (xy) per P_0 , conservandolo anch'esso indefinitamente. $E = \hbar \omega$ $\gamma = \hbar \omega / c$

Il concetto di spin viene quindi associato ai moti rotatori componenti presenti nella funzione d'onda generale $\psi(\vec{r}, t)$ dell'elettrone, o più in particolare alla funzione d'onda secondaria ψ_2 .

Vediamo comunque di analizzare il problema da un punto di vista matematico per vedere se effettivamente la funzione d'onda generale dell'elettrone e la corrispondente equazione di struttura (49) possono contemplare un momento angolare.

Poiché siamo nel caso di potenziale a simmetria sferica do